C3 TRIGONOMETRY — *Answers - Worksheet E*

1 **a** $\sin(A+B) \equiv \sin A\cos B + \cos A\sin B$ (1)
$\sin(A-B) \equiv \sin A\cos B - \cos A\sin B$ (2)

b (1) + (2) $\sin(A+B) + \sin(A-B) \equiv \sin A\cos B + \cos A\sin B + \sin A\cos B - \cos A\sin B$
$\Rightarrow$ $2\sin A\cos B \equiv \sin(A+B) + \sin(A-B)$

c $\cos(A+B) \equiv \cos A\cos B - \sin A\sin B$ (3)
$\cos(A-B) \equiv \cos A\cos B + \sin A\sin B$ (4)
(3) + (4) $2\cos A\cos B \equiv \cos(A+B) + \cos(A-B)$
(4) − (3) $2\sin A\sin B \equiv \cos(A-B) - \cos(A+B)$

2 **a** $= \sin(30+10)° + \sin(30-10)°$
$= \sin 40° + \sin 20°$

b $= \cos(36+18)° + \cos(36-18)°$
$= \cos 54° + \cos 18°$

c $= \frac{1}{2}[\sin(49+25)° - \sin(49-25)°]$
$= \frac{1}{2}\sin 74° - \frac{1}{2}\sin 24°$

d $= \cos(3A-A) - \cos(3A+A)$
$= \cos 2A - \cos 4A$

e $= \sin(5A+2A) - \sin(5A-2A)$
$= \sin 7A - \sin 3A$

f $= 2[\cos(3A+B) + \cos(3A-B)]$
$= 2\cos(3A+B) + 2\cos(3A-B)$

g $= \frac{1}{2}[\sin(A+6B) + \sin(A-6B)]$
$= \frac{1}{2}\sin(A+6B) + \frac{1}{2}\sin(A-6B)$

h $= \sin[A+(A+40°)] - \sin[A-(A+40°)]$
$= \sin(2A+40°) - \sin(-40°)$
$= \sin(2A+40°) + \sin 40°$

3 **a** $2\sin A\cos B \equiv \sin(A+B) + \sin(A-B)$
let $P = A+B$ (1) and $Q = A-B$ (2)
(1) + (2) $\Rightarrow 2A = P+Q \Rightarrow A = \frac{P+Q}{2}$, (1) − (2) $\Rightarrow 2B = P-Q \Rightarrow B = \frac{P-Q}{2}$
$\therefore \sin P + \sin Q \equiv 2\sin\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}$

b let $P = A+B$ and $Q = A-B$ in each part

i $2\cos A\sin B \equiv \sin(A+B) - \sin(A-B) \Rightarrow \sin P - \sin Q \equiv 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$

ii $2\cos A\cos B \equiv \cos(A+B) + \cos(A-B) \Rightarrow \cos P + \cos Q \equiv 2\cos\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}$

iii $2\sin A\sin B \equiv \cos(A-B) - \cos(A+B) \Rightarrow \cos Q - \cos P \equiv 2\sin\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$
$\Rightarrow \cos P - \cos Q \equiv -2\sin\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$

4 **a** $= 2\cos\frac{25+15}{2}\cos\frac{25-15}{2}$
$= 2\cos 20°\cos 5°$

b $= 2\cos\frac{84+30}{2}\sin\frac{84-30}{2}$
$= 2\cos 57°\sin 27°$

c $= 2\sin\frac{5A+A}{2}\cos\frac{5A-A}{2}$
$= 2\sin 3A\cos 2A$

d $= -2\sin\frac{A+2A}{2}\sin\frac{A-2A}{2}$
$= -2\sin\frac{3A}{2}\sin(-\frac{A}{2}) = 2\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{A}{2}$

e $= -2\sin\frac{2A+4B}{2}\sin\frac{2A-4B}{2}$
$= -2\sin(A+2B)\sin(A-2B)$

f $= 2\sin\frac{2A+90}{2}\cos(\frac{-30}{2})$
$= 2\sin(A+45)\cos(-15) = 2\sin(A+45°)\cos 15°$

g $= 4\cos\frac{A+3A}{2}\cos\frac{A-3A}{2}$
$= 4\cos 2A\cos(-A) = 4\cos 2A\cos A$

h $= 2\cos\frac{4A+B}{2}\sin\frac{3B-2A}{2}$
$= 2\cos(2A+\frac{1}{2}B)\sin(\frac{3}{2}B-A)$

5 **a** $2\cos\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}=0$

$\cos 2x\sin x=0$

$\cos 2x=0$ or $\sin x=0$

$2x=\frac{\pi}{2}, 2\pi-\frac{\pi}{2}$ or $x=0, \pi$

$2x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ or $x=0, \pi$

$x=0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi$

b $\cos 4x-\cos x=0$

$-2\sin\frac{4x+x}{2}\sin\frac{4x-x}{2}=0$

$\sin\frac{5}{2}x\sin\frac{3}{2}x=0$

$\sin\frac{5}{2}x=0$ or $\sin\frac{3}{2}x=0$

$\frac{5}{2}x=0, \pi, 2\pi$ or $\sin\frac{3}{2}x=0, \pi$

$x=0, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}$

c $\cos(x-5x)-\cos(x+5x)=\cos 4x$

$\cos(-4x)-\cos 6x=\cos 4x$

$\cos 4x-\cos 6x=\cos 4x$

$\cos 6x=0$

$6x=\frac{\pi}{2}, 2\pi-\frac{\pi}{2}, 2\pi+\frac{\pi}{2},$

$4\pi-\frac{\pi}{2}, 4\pi+\frac{\pi}{2}, 6\pi-\frac{\pi}{2}$

$=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}$

$x=\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}$

d $4[\sin(2x+\frac{\pi}{2})-\sin\frac{\pi}{6}]=1$

$\sin(2x+\frac{\pi}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\sin(2x+\frac{\pi}{2})=\frac{3}{4}$

$2x+\frac{\pi}{2}=\pi-0.8481, 2\pi+0.8481$

$=2.2935, 7.1312$

$2x=0.7227, 5.5605$

$x=0.36, 2.78$

e $2\sin\frac{x+\frac{x}{2}}{2}\cos\frac{x-\frac{x}{2}}{2}=0$

$\sin\frac{3}{4}x\cos\frac{1}{4}x=0$

$\sin\frac{3}{4}x=0$ or $\cos\frac{1}{4}x=0$

$\frac{3}{4}x=0$ or (none in interval)

$x=0$

f $2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=\cos 2x$

$2\cos 2x\cos x=\cos 2x$

$\cos 2x(2\cos x-1)=0$

$\cos 2x=0$ or $\cos x=\frac{1}{2}$

$2x=\frac{\pi}{2}, 2\pi-\frac{\pi}{2}$ or $x=\frac{\pi}{3}$

$2x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ or $x=\frac{\pi}{3}$

$x=\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$

6 **a** $\cos(2x+3x)+\cos(2x-3x)-\cos x=0$

$\cos 5x+\cos(-x)-\cos x=0$

$\cos 5x+\cos x-\cos x=0$

$\cos 5x=0$

$5x=90, 360-90, 360+90,$

$720-90, 720+90$

$=90, 270, 450, 630, 810$

$x=18°, 54°, 90°, 126°, 162°$

b $2\cos\frac{3x+2x}{2}\sin\frac{3x-2x}{2}=0$

$\cos\frac{5}{2}x\sin\frac{1}{2}x=0$

$\cos\frac{5}{2}x=0$ or $\sin\frac{1}{2}x=0$

$\frac{5}{2}x=90, 360-90, 360+90$ or $\frac{1}{2}x=0$

$\frac{5}{2}x=90, 270, 450$ or $\frac{1}{2}x=0$

$x=0, 36°, 108°, 180°$

c $2\sin\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2} = \sin 3x$

$2\sin 3x\cos x = \sin 3x$

$\sin 3x(2\cos x - 1) = 0$

$\sin 3x = 0$ or $\cos x = \frac{1}{2}$

$3x = 0, 180, 360, 540$ or $x = 60$

$x = 0, 60°, 120°, 180°$

d $\cos 2x - \cos(x - 60) = 0$

$-2\sin\frac{3x-60}{2}\sin\frac{x+60}{2} = 0$

$\sin(\frac{3}{2}x - 30)\sin(\frac{1}{2}x + 30) = 0$

$\sin(\frac{3}{2}x - 30) = 0$ or $\sin(\frac{1}{2}x + 30) = 0$

$\frac{3}{2}x - 30 = 0, 180$ or (none in interval)

$\frac{3}{2}x = 30, 210$

$x = 20°, 140°$

e $\frac{1}{2}[\sin(5x + x) - \sin(5x - x)] + \sin 4x = 0$

$\frac{1}{2}\sin 6x - \frac{1}{2}\sin 4x + \sin 4x = 0$

$\frac{1}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 4x = 0$

$\sin\frac{6x+4x}{2}\cos\frac{6x-4x}{2} = 0$

$\sin 5x\cos x = 0$

$\sin 5x = 0$ or $\cos x = 0$

$5x = 0, 180, 360, 540, 720, 900$ or $x = 90$

$x = 0, 36°, 72°, 90°, 108°, 144°, 180°$

f $2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2} = 2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}$

$\sin 2x\cos(-x) = \cos 2x\cos(-x)$

$\sin 2x\cos x = \cos 2x\cos x$

$\cos x(\sin 2x - \cos 2x) = 0$

$\cos x = 0$ or $\sin 2x = \cos 2x$

$\cos x = 0$ or $\tan 2x = 1$

$x = 90$ or $2x = 45, 180 + 45 = 45, 225$

$x = 22.5°, 90°, 112.5°$

7 **a** LHS $= 2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2} + \sin 2x$

$= 2\sin 2x\cos(-x) + \sin 2x$

$= 2\sin 2x\cos x + \sin 2x$

$= \sin 2x(2\cos x + 1)$

= RHS

b LHS $= \dfrac{-2\sin\frac{x+3x}{2}\sin\frac{x-3x}{2}}{2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}}$

$= \dfrac{-\sin 2x\sin(-x)}{\cos 2x\cos(-x)}$

$= \dfrac{\sin 2x\sin x}{\cos 2x\cos x}$

$= \tan x\tan 2x$

= RHS